Z2062 – 1er. parcial 2025 **Prof. Campillo**

E1) El plano tangente a la superficie $x^2+2y^2-6xy=z$ en $(0\ ,\ 2\ ,\ z_0)$ corta a la superficie $x^2+y^2=4$ según la curva C. Determinar una función vectorial que parametrice la curva C **de manera completa**. Hallar la ecuación de la recta tangente a C en el punto $(-2\ ,\ 0\ ,\ 16)$

E2) Dada la función $w=x\,u^2$, con $u=f(x,y)$ que está definida implícitamente por $2-x\,u=\ln(2u-y)$ en un entorno del punto (1 , 3), resulta $w=h\,(x,y)$. Calcular aproximadamente $h\,(0.98\,,3.01)$

E3) a) Analizar y clasificar los extremos de $f(x,y)=y^2+x^3+yx^2-x^2$

b) Dados los campos $\overline{f}(x,y)=(y\,g(x)\,,g(x))$ y $\overline{h}(x,y)=(x\,,1-xy)$, hallar $g(x)$ de modo que $\dfrac{\partial\overline{f}}{\partial x}+\dfrac{\partial\overline{f}}{\partial y}$ resulte ortogonal a $\overline{h}$ en todo punto, suponiendo $g(0)=-1$.

E4) Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy+x^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Analizar la continuidad de f en (0,0)
b) Hallar, si existen, las derivadas parciales de f en (0,0).
c) Analizar la diferenciabilidad de f en (0,0). Justificar

T1) Enunciar y demostrar el teorema de homogeneidad para campos escalares $f:D\subset R^n\to R$

T2) Dada $\overline{f}:D\subset R\to R^n$, demostrar que $\overline{f}$ es derivable en t_0, punto interior de D, si y solo si sus componentes son derivables en dicho punto. Enunciar el teorema correspondiente.

AM 2	1° parcial Prof. Campiello	HOJA N° 1/3 FECHA 1º 2015

E1) El plano tangente a la sup. $x^2+2y^2-6xy=z$ en $(0,2,z_0)$ corta a la sup. $\underbrace{x^2+y^2=4}_{S}$ según la curva C.

Determinar una función vectorial que parametrice C de manera completa.

Hallar la ec. de la recta tang. a C en $(-2,0,16)$

$S: x^2+2y^2-6xy=z \qquad (0,2,z_0)\in S$

$0^2+\underbrace{2\times 2^2}_{8}-6\times 0\times 2=z_0 \leftarrow x=0,\ y=2,\ z=z_0$

$\rightarrow z_0=8$

$\boxed{P=(0,2,8)}$

$N=\frac{\nabla G}{(G'z)} \Rightarrow N=(2x-6y,\ 4y-6x,\ -1)$

en $x=0$, $y=2$, $z=8$ $\rightarrow N_P=(-12,8,-1)$

Pl. tang: $N(x,y,z)=N.P$

$-12x+8y-z=(-12,8,-1)(0,2,8)$

PT: $\boxed{-12x+8y-z=8} \rightarrow z=-12x+8y-8$

Hallo PT $\cap$ S: $x^2+y^2=4 \longrightarrow x=2\cos(\theta)$, $y=2\,\mathrm{sen}(\theta)$

$$\boxed{C:\bar{\gamma}(t)=\left(2\cos(\theta),\ 2\,\mathrm{sen}(\theta),\ \underbrace{-12\times 2}_{-24}\cos(\theta)+\underbrace{8\times 2}_{16}\,\mathrm{sen}(\theta)-8\right)\quad 0\leq\theta\leq 2\pi}$$

$(-2,0,16)=\bar{\gamma}(t_0) \Rightarrow 2\cos(\theta)=-2 \Rightarrow \theta=\pi$

$2\,\mathrm{sen}(\pi)=0$ ✓ $\rightarrow \theta=\pi$

$-24\cos(\pi)+16\,\underbrace{\mathrm{sen}(\pi)}_{0}-8=16$ ✓

$\bar{\gamma}'(t)=(-2\,\mathrm{sen}(\theta),\ 2\cos(\theta),\ 24\,\mathrm{sen}(\theta)+16\cos(\theta))$

$\bar{\gamma}'(\pi)=(0,-2,-16)$

$$\boxed{L: \bar{\beta}(t)=t\,(0,2,16)+(-2,0,16) \quad t\in\mathbb{R}}$$

NOTA

E2) Dada la función $w = x u^2$, con $u = f(x,y)$ que está definida implícitamente por $2 - xu = \ln(2u - y)$ en un entorno del punto $(1,3)$ resulta $w = h(x,y)$

Calcular, aprox., $h(0{,}98 ; 3{,}01)$

Hallo el plano tang a la gráfica de h en $(1;3) \to \boxed{x=1,\ y=3}$

III) $w = \underbrace{h(1;3)}_{x u^2 = 1 \cdot 2^2 = 4 \ \to\ \boxed{h(1,3) = 4}} + h'_{x(1,3)}(x-1) + h'_{y(1,3)}(y-3)$

$f(x,y)$ definida por: $2 - xu = \ln(2u - y)$ $\quad x = 1 \wedge y = 3$

$\mathcal{E}(1;3)$ $\qquad 2 - u = \ln(2u - 3)$ $\quad \boxed{u = 2}$ cumple la ec. $\to u = f(1,3) = 2$

$\boxed{h(x,y) = w = x u^2 = x f(x,y)^2}$ $\quad u = f(x,3)$

$h'_x = f(x,y)^2 + x f'_{x(x,y)} f(x,y) \to h'_{x(1,3)} = 2^2 + 1 f'_{x(1,3)} 2$

$\mathcal{E}(1,3)$ $\quad \boxed{h'_{x(1;3)} = 4 + 2 f'_{x(1,3)}}$ I

$h'_y = x f'_{y(x,y)} \cdot f(x,y) \to h'_{y(1,3)} = 1 \cdot f'_{y(1,3)} \cdot 2 = \boxed{2 f'_{y(1,3)} = h'_{y(1,3)}}$ II

Hallo $f'_{x(1,3)}$ y $f'_{y(1,3)}$

$F(x,y,u) = 2 - xu - \ln(2u - y)$

x TFI: $f'_{x(1,3)} = -\dfrac{F'_{x(1,3,2)}}{F'_{u(1,3,2)}}$ y $f'_{y(1,3)} = -\dfrac{F'_{y(1,3,2)}}{F'_{u(1,3,2)}}$

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= -u \longrightarrow F'_{x(1,3,2)} = -2 \\ F'_y &= -\frac{-1}{2u-y} \to F'_{y(1,3,2)} = 1 \\ F'_u &= -\frac{2}{2u-y} \to F'_{u(1,3,2)} = -2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} f'_{x(1,3)} &= -\frac{-2}{-2} = -1 \\ f'_{y(1,3)} &= -\frac{1}{-2} = 1/2 \end{aligned}$$

I) $h'_{x(1,3)} = 4 + 2 \cdot (-1) = 2$

II) $h'_{y(1,3)} = 2 \frac{1}{2} = 1$

III) $\boxed{w = 4 + \overbrace{2(x-1)}^{2x-2} + y - 3} \to \boxed{w = 2x + y - 1}$

$h(0{,}98 ; 3{,}01) \cong 2 \times 0.98 + 3.01 - 1 = 3{,}97$ $\quad \boxed{h_{(0{,}98, 3{,}01)} \cong 3{,}97}$

NOTA

AM2 | 1° parcial | Prof. Campello | HOJA N° 2/3 | FECHA 1°C 2025

E3 a) Analizar y clasificar los extremos de $f(x,y) = y^2 + x^3 + yx^2 - x^2$

Hallo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 2xy - 2x = 0 = x(3x + 2y - 2) \to \begin{cases} x = 0 & \text{I} \\ 3x + 2y - 2 = 0 & \text{II} \end{cases} \\ f'_y = 2y + x^2 = 0 \quad \text{III} \end{cases}$$

$$\underbrace{3x+2y-2=0}_{2y = 2-3x}$$

I $x = 0$ en III : $2y + 0^2 = 0 \to y = 0 \to \boxed{PC_1 = (0,0)}$

II $2y = 2 - 3x$ en III : $2 - 3x + x^2 = 0 \to x_1 = 1 \to 2y = 2 - 3 = -1$, $y = -1/2$ $\boxed{PC_2 = (1, -1/2)}$

$x_2 = 2$, $2y = 2 - 6 = -4 \to y = -2$ $\boxed{PC_3 = (2,-2)}$

Analizo, por el criterio del Hessiano, si los PC son extremos

$$\begin{cases} f''_{xx} = 6x + 2y - 2 \\ f''_{xy} = 2x \\ f''_{yy} = 2 \end{cases} \qquad H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2y-2 & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

$H(PC_1) = H(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to |H(0,0)| < 0 \to$ No es extremo

$H(PC_2) = H(1,-1/2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to |H(1,-1/2)| = 2 > 0$ y $f''_{xx} = 3 > 0$

$\boxed{f(1,-1/2) \text{ alcanza mínimo relativo}}$

$H(PC_3) = H(2,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \to |H(2,-2)| = 12 - 16 < 0$ no es extremo

NOTA

HOJA N°

FECHA

3b) Dados los campos $\bar{F}_{(x,y)} = (y\,g(x), g(x))$ y $\bar{h}(x,y) = (x, 1-xy)$ hallar $g(x)$ de modo que $\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y}$ resulte ortogonal a $\bar{h}$ en todo punto, suponiendo $g(0) = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}(x,y) = (y\,g'(x), g'(x)) \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial y}(x,y) = (g(x), 0) \end{array}\right\} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} = (y\,g'(x) + g(x), g'(x))$$

Si $\bar{h}$ y $\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y}$ son ortogonales $\Rightarrow$ $\bar{h} \cdot \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y}\right) = 0$

$$(x, 1-xy) \cdot (y\,g'(x) + g(x), g'(x)) = 0$$

$$xy\,\cancel{g'(x)} + x\,g(x) + g'(x) - xy\,\cancel{g'(x)} = 0$$

$$x\,g(x) + g'(x) = 0$$

tomo $y = g(x)$ $\longrightarrow$ $xy + y' = 0$

$$y' = -xy$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

$$\frac{dy}{y} = -x\,dx$$

integro m.a.m $\quad \ln(y) = -\frac{x^2}{2} + c$

$e^{\ln(y)} = y \longrightarrow \quad e^{\ln(y)} = e^{-\frac{x^2}{2}} e^c$

$$\boxed{y = k e^{-\frac{x^2}{2}}} \text{ sol. gral}$$

$g(x) = k e^{-\frac{x^2}{2}}$

$g(0) = -1 = k e^0 \rightarrow k = -1$

$$\boxed{g(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

NOTA

E4

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy + x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Analizar la continuidad de f en (0,0)

- $f(0,0) = 0$
- $¿\exists \lim_{xy \to 00} f(x,y)$? $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy+x^3}{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{por } x=0} 0$

$y = x$

$$\lim_{xy\to 00} \frac{x^2+x^3}{x^2+x^2} = \lim_{xy\to 00} \underbrace{\frac{x^2}{2x^2}}_{\to 1/2} + \lim_{xy\to 00} \overbrace{\frac{x^3}{2x^2}}^{\to 0} = \frac{1}{2}$$

$\neq$

$\nexists \lim$

f no es cont en (0,0)

b) Hallar, si $\exists$, las derivadas parciales de f en (0,0)

Hallo $f'_{v}(0,0)$ $\quad f'_x = f'_v$ con $v = (1,0)$ $\quad v = (a,b)$

$f'_y = f'_v$ con $v = (0,1)$ $\quad a^2+b^2 = 1$

$$f'_{v,(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h.v) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{hahb + h^3a^3}{h^2a^2+h^2b^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\cancel{h^2}(ab+ha^3)}{\cancel{h^2}\underbrace{(a^2+b^2)}_{1}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{ab+ha^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(b+ha^2)}{h} \xrightarrow{\text{si } a=0} \lim = 0$$

$$\boxed{f'_y(0,0) = 0}$$

si $a = 1$ y $b = 0$ $\to f'_x(0,0)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1(0+h1^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \boxed{1 = f'_x(0,0)}$$

c) Analizar la diferenciabilidad en el origen

f NO es continua en (0,0) $\Rightarrow$ f NO es diferenciable en (0,0)

AM 2	1° parcial	Prof. Campillo	HOJA N° 3/3 FECHA 1° C 2025

$\boxed{T1}$ Enunciar y demostrar el teorema de homogeneidad para campos escalares: $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Si existe la derivada direccional $f'(\vec{x}_m, \vec{N})$ y $k \in \mathbb{R} \neq 0$

entonces

$$f'(\bar{x}_m, k\bar{N}) = k\, f'(\bar{x}_m, \bar{N})$$

multiplico y divido por k

<u>dem</u>:

$$f'(\bar{x}, k\bar{N}) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(\bar{x}+k\bar{N}) - f(\bar{x})}{h} \cdot \frac{k}{k}$$

$$= k \lim_{h\to 0} \frac{f'(\bar{x}+k\bar{N}) - f(\bar{x})}{\underbrace{kh}_{\to 0}}$$

lo llamo h_2

$$f'(\bar{x}, k\bar{N}) = k \lim_{h_2\to 0} \frac{f'(\bar{x}+\check{N}) - f(\bar{x})}{h_2}$$

$$f'(\bar{x}, k\check{N}) = k\, f'(\bar{x}, \check{N})$$

NOTA